Descartes 2D

EDA 2007

EXPERIMENTACION CON DESCARTES EN EL AULA

ELS NOMBRES COMPLEXOS

1. De R (nombres reals) a C (nombres complexos)

1 a) Resoleu en el conjunt R les equacions següents (després comprova els resultats en l'escena) :

a) $x^2 - 2 = 0$	b) $2x^2 - 5x + 1 = 0$

c) $5x^2 - x - 2 = 0$	d) $x^2 + 1 = 0$

e) $x^2 - 2x + 1 = 0$	f) $5x^2 + 10 = 0$

1 b) Digues quines de les equacions anteriors no tenen solució en R . Per què?

1 c) Quina operació no podem realitzar en el conjunt de nombres reals?.

Per tant, **haurem d'ampliar el conjunt R**, de manera que en el nou conjunt aquestes equacions tinguin solució.

Hem vist que l'operació que no podem resoldre en R és l'arrel quadrada de nombres negatius

Si anomenem ***unitat imaginària*** i denotem per i a $\sqrt{-1}$: i = $\sqrt{-1}$
llavors, per exemple , l'equació : $x^2-6x+11=0$ tindrà com a solucions :

$$\mathbf{x} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 44}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{-8}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{8}.\sqrt{-1}}{2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{2}.i}{2} = 3 \pm \sqrt{2}.i$$

I direm que els nombres $3 \pm \sqrt{2}\, i$ són ***complexos.***

Recorda que $i = \sqrt{-1}$ i verifica que : $i^2 = \left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1$

Al conjunt dels nombres ***Complexos*** l'indiquem per **C** i són de la forma **a+bi**, on a i b són nombres reals.
Direm que ***a*** és la ***<u>part real</u>*** del nombre complex i ***b*** és la ***<u>part imaginària</u>***.
A aquesta manera d'expressar el nombre complex en diem ***<u>forma binòmica</u>***.

- Diem que un nombre complex és ***<u>imaginari pur</u>*** si només té part imaginària.

Els nombres 4 i , $-\frac{2}{3}i$, $2\sqrt{3}\, i$ són imaginaris purs.

- Els nombres reals també són complexos ja que qualsevol nombre real és un nombre complex de part imaginària 0..

2. Representació gràfica dels nombres complexos

Els nombres complexos es representen mitjançant ***vectors***. A l'extrem del vector l'anomenem ***afix*** del complex.
Per exemple, l'afix del nombre complex 2 +3i és el punt (2,3).
Representarem la part real del nombre complex en l'eix horitzonal i la part imaginària en l'eix vertical; per això als eixos també els anomenem ***eix real*** i ***eix imaginari***, respectivament.

EXERCICI 1

Representa gràficament els nombres complexos següents i posteriorment comprova els resultats en l' escena:

Z_1= 5+2i , Z_2= -4+3i , Z_3= -3-2i , Z_4= -4.5-3i , Z_5 = -2i , Z_6= 3 , Z_7= i

.

3. Oposat i conjugat d'un nombre complex

Observa les definicions d'oposat i conjugat d'un nombre complex :

Nombre complex $z = a + b\,i$	**Oposat** de z :	$-\mathbf{z} = -a - bi$
	Conjugat de z :	$\bar{z} = a - bi$

EXERCICI 2 Escriu amb paraules les definicions de complex oposat i complex conjugat :

- ✓ Direm que 2 nombres complexos **són oposats** si
- ✓ Direm que 2 nombres complexos **són conjugats** si

EXERCICI 3 Dels nombres complexos següents, troba els oposats, els conjugats i representa'ls gràficament : 3-5i, 5+2i, -1-2i, -2+3i, 5, 0, 2i, -5i.

4. Les potències de i

Copia el quadre de les successives potències de la unitat imaginària .

Fixa't que els valors es repeteixen cada 4. Això ens donarà el mètode per trobar qualsevol potència de i:

Per trobar i^n , només cal dividir n entre 4 i el residu de la divisió entera serà l'exponent del resultat.

En aquesta divisió ,com el divisor és 4, el residu serà : 0, 1, 2 ó 3 , i per tant qualsevol potència de i serà igual a : $i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$ ó $i^3 = -i$

EXERCICI 4 Calcula les potències següents i representa els resultats :

a) $i^{189} =$ b) $i^{134} =$

c) $i^{275} =$ d) $i^{1284} =$

5. Operacions amb nombres complexos

5.1. Suma i resta

La suma i la resta de nombres complexos s'efectua seguint les regles de les operacions amb nombres reals.
Són equivalents a la suma i resta de vectors, tenint en compte que a cada nombre complex li correspon un vector.

$$(a + bi) + (c + di) = (a+c) + (b+d) i$$

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b-d) i$$

EXERCICI 5
Escriu amb paraules com es sumen dos nombres complexos i com es resten

EXERCICI 6 Realitza les següents operacions :

a) (3+i) + (1-3i) =	b) (-5+3i) - (6+4i) =
c) (0.5-4i)+(-1.5-i) =	d) (-3.8+2.4i) - (1.3+0.5i) =

5.2. Multiplicació

La multiplicació de nombres complexos s'efectua com si fossin nombres reals; només cal tenir en compte que $i^2 = -1$.

EXEMPLE Anem a multiplicar (-5 + 2i) (4 – 7i)

$$(-5 + 2i) (4 – 7i) = -20 + 8i +35i –14 i^2 = -20 + 43i – 14 (-1) = - 6 + 43i$$

EXERCICI 7. Efectua les multiplicacions següents

a) (-2-2i)(1+3i) =

b) (2+3i)(5-6i) =

c) (2+3i)(-2-3i) =

d) (-1-2i)(-1+2i) =

- ✓ Què passa quan multipliquem un nombre pel seu conjugat(apartat d)?Efectua d'altres exemples i explica el què observes.

- ✓ I si multipliquem qualsevol nombre complex per i?Compara el nombre amb el resultat i dedueix la relació entre ells.

5.3. Divisió

Per a dividir dos nombres complexos, multiplicarem el dividend i el divisor pel conjugat d'aquest i així el divisor serà un nombre real.Finalment només cal separar la part real de la part imaginària.

EXEMPLE Fem la divisió : $\dfrac{5-3i}{4+2i}$

$$\frac{5-3i}{4+2i}=\frac{(5-3i)(4-2i)}{(4+2i)(4-2i)}=\frac{20-12i-10i+6i^2}{16+8i-8i-4i^2}=\frac{20-22i+6(-1)}{16-4(-1)}=\frac{14-22i}{20}=\frac{14}{20}-\frac{22}{20}i=\frac{7}{10}-\frac{11}{10}i$$

EXERCICI 8. Efectua les divisions següents:

a) $\dfrac{2+4i}{4-2i}=$

b) $\dfrac{1-4i}{3+i}=$

c) $\dfrac{5+i}{-2-i}=$

d) $\dfrac{4-2i}{i}=$

6. Nombres complexos en forma polar

Ja hem vist que a qualsevol nombre complex li fem correspondre un vector. Definim ***mòdul*** , ***argument*** i ***forma polar*** d'un nombre complex de la forma:

Módul d'un nombre complex z és la longitud del vector que el representa	|z|=r
Argument d'un complex és l'angle que forma el vector amb l'eix real	arg(z)=α
Forma polar d'un nombre complex	r_α

6.1. De la forma binòmica a la polar

Del triangle rectangle format per z , a i b , pots deduir que:

<table>
<tr><td rowspan="2">Si coneixem la

Forma binòmica
z =a + bi</td><td colspan="2">Calculem :
$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$</td><td rowspan="2">I així hem passat a la

Forma polar : r_α</td></tr>
<tr><td>$tg(\alpha) = \frac{b}{a}$</td><td>$\alpha = arctg\left(\frac{b}{a}\right)$</td></tr>
</table>

EXERCICI 9 Passa a la forma polar els nombres complexos :

a) $1 + \sqrt{3}\,i$

b) $-2 + 2i$

c) -5

d) - 7i

6.2. De la forma polar a la binòmica

Del triangle rectangle format per z , a i b , pots deduir que:

Si coneixem la **forma polar** : r_α	Calculem : $a = r\cos\alpha$ $b = r\sin\alpha$	Llavors, la **forma binòmica** serà : z = a + bi = $r\cos\alpha + i\,r\sin\alpha$

EXERCICI 10 . Passa aquests nombres a la forma binòmica :

a) 1_{225° =

b) 4_{0° =

c) 3_{270° =

d) 2_{295° =

e)1.8_{90° =

f) 2.3_{120° =

7. Operacions amb nombres complexos en forma polar

7.1. Multiplicació

De l' escena deduïm que : per multiplicar complexos en forma polar, es **multipliquen els mòduls** i es **sumen els arguments**.

$$r_\alpha \cdot r'_{\alpha'} = (r \cdot r')_{\alpha+\alpha'}$$

EXERCICI 11. Efectua els productes següents :

a) $3_{15^\circ} \cdot 2_{75^\circ}$ =

b) 4_{60° · pel seu conjugat =

c) 3_{150° · pel seu oposat =

7.2. Potència

La potència és un producte de factors iguals, per tant la regla serà la mateixa que la de multiplicar. Així : $\left(r_\alpha\right)^n = \left(r^n\right)_{n\cdot\alpha}$

Per elevar a n : s'eleva el mòdul i l' argument es multiplica per n.

EXERCICI 12 . Efectua les potències següents :

a) $(1.5_{60^\circ})^4$

b) $(3_{90^\circ})^2$

c) $(2_{120^\circ})^3$

d) $(1_{45^\circ})^7$

7.3. Divisió

$$\frac{r_\alpha}{r'_\beta} = \left(\frac{r}{r'}\right)_{\alpha-\beta}$$

Per a dividir dos complexos en forma polar, **dividirem els mòduls** i ***restarem els arguments.***

EXERCICI 13. Efectua les divisions :

a) $5_{150^\circ} : 2_{30^\circ}$ =

b) $6_{225^\circ} : 3_{75^\circ}$ =

d) 4_{340° dividit pel seu conjugat

d) 3_{50° dividit pel seu oposat

7.4. Fórmula de Moivre

La fórmula de Moivre és : $\boxed{(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha)}$

és una fórmula útil en trigonometria perquè ens permet trobar $\cos n\alpha$ i $\sin n\alpha$ en funció de $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$.
I d'on surt aquesta fórmula?

EXERCICI 14. Dedueix la fórmula de Moivre a partir d'aplicar la fórmula de la potència al nombre 1_α .

8. Arrels de nombres complexos

Sabem que la radicació és l'operació inversa de la potenciació.

En el 1r exemple hem vist que : $\left(2_{30^\circ}\right)^3 = \left(2_{150^\circ}\right)^3 = \left(2_{270^\circ}\right)^3 = 8_{90^\circ}$
Això significa que el nombre 8_{90° té 3 arrels cúbiques : 2_{30° , 2_{150° i 2_{270° .

En el 2n exemple, observem que : $\left(1_{60^\circ}\right)^4 = \left(1_{150^\circ}\right)^4 = \left(1_{240^\circ}\right)^4 = \left(1_{330^\circ}\right)^4 = 1_{240^\circ}$

per tant, el nombre 1_{240° té 4 arrels quartes : 1_{60° , 1_{150° , 1_{240° i 1_{330°

Deduïm doncs, que ***l'arrel cúbica té 3 solucions i l'arrel quarta, quatre***.

8.1. Arrel quadrada

En l'exemple de l' escena has vist com es troben les arrels quadrades de 4+3i.

EXERCICI 15. A la vista de l'exemple, calcula les arrels quadrades següents:

a) $\sqrt{1-i}$

b) $\sqrt{-9}$

c) $\sqrt{4i}$

En acabar comprova els resultats en l' escena.

8.2. Arrel cúbica

En l'exemple has vist com calcular $\sqrt[3]{2+4i}$

EXERCICI 16. Ara calcula tu les arrels cúbiques dels nombres següents:

a) $\sqrt[3]{-i}$

b) $\sqrt[3]{-8}$

c) $\sqrt[3]{6}$

d) $\sqrt[3]{-2+3i}$

Després comprova els resultats en l' escena.

8.3. Arrel n-èsima

En l'escena pots calcular les n solucions de l'arrel n-èsima de qualsevol nombre complex z , expressat en forma polar.

EXERCICI 17. Calculeu les arrels següents, donant els resultats en forma polar i en forma binòmica:

a) $\sqrt[5]{5_{270^\circ}}$

b) $\sqrt[4]{6_{120^\circ}}$

c) $\sqrt[6]{-9}$

d) $\sqrt[5]{8i}$

NOM: COGNOMS:

EXERCICIS DE RECAPITULACIÓ 1ª PART

1. Completa el quadre següent :

Nombre	Part real	Part imaginària	Oposat	Conjugat
$5-\sqrt{2}\,i$				
$-\sqrt{5}\,i$				
-8				

2. Resol en C , les equacions següents :

a) $x^2+25=0$ b) $x^2+2x+2=0$

3. Efectua les operacions següents :

a) (2+4i) + (8-i) – (-7+3i) =

b) $(-8+5i)-(-2+12i)+\frac{1}{2}(-6+10i)=$

c) $(8-2i)(3-5i)=$

d) $\frac{2+5i}{3-2i}(1-i)=$

a) $i^{215}+i^{2007}=$

f) $\frac{(-2i)^2(4-2i)}{1-5i}=$

4. Troba el valor de x, real perquè $(25-xi)^2$ sigui un nombre imaginari pur.

NOM: COGNOMS:

EXERCICIS DE COMPLEXOS EN FORMA POLAR

1. Expressa en forma polar els nombres :
   a) $\sqrt{3}-i$ b) -12 c) -1 + i^{23}

2. Expressa en forma binòmica els nombres :
   a) 5_{450° b) $10_{\frac{\pi}{3}}$

3. Efectua les operacions deixant els resultats en polar i en binòmica :
   a) $1_{120^\circ} \cdot 3_{60^\circ}$

   b) $\left(16_{45^\circ}\right):\left(4_{15^\circ}\right)$

   c) $\left(2_{\frac{\pi}{6}}\right)^6$

   d) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{10}$

   e) $\sqrt[4]{16_{120^\circ}}$

   f) $\frac{\left(\sqrt{3}+i\right)^5}{\left(1-i\right)^2}$

   g) $\sqrt[3]{\frac{-2+2i}{1+\sqrt{3}\,i}}$

4. Calcula la suma de les 8 arrels de $\sqrt[8]{1}$.

5. El nombre 4+3i és una arrel quarta d'un cert nombre z . Trobeu les altres arrels quartes de z.